Tópicos del Seminario
Revista de Semiótica
eISSN: 2594-0619
SeS

Artículos

Dimensiones espaciales y semánticas

Spatial and Semantic Dimensions
Dimensions spatiales et sémantiques

Manar Hammad
Universidad de París Sorbona

Manar.hammad@icloud.com

Traducción de Verónica Estay Stange

Resumen

En su uso descriptivo, la noción de *dimensión* corresponde a una metáfora espacial proyectada sobre dominios semánticos externos a las matemáticas. Este ensayo reconsidera tres maneras diferentes de aplicar la noción de dimensión en matemáticas. Luego pasa a su uso generalizado en ciencias físicas y en ciencias sociales. Concluye con observaciones relativas al uso de esta noción.

Palabras clave: dimensión, matemáticas, dominio semántico, ciencias físicas, ciencias sociales

Abstract

In its descriptive use, the notion of *dimension* pertains to a spatial metaphor projected upon semantic domains chosen outside mathematics. This essay reconsiders three ways of using the notion of dimension in mathematics. It considers after that its generalized use in physical sciences and social sciences. It ends with some remarks about the use made of the notion.

Keywords: dimension, mathematics, semantic domain, physical sciences, social sciences

Résumé

En son usage descriptif, la notion de *dimension* relève d'une métaphore spatiale projetée sur des domaines sémantiques pris hors des mathématiques. Cet essai reconsidère trois manières différentes de mettre en œuvre la notion de dimension en mathématiques. Il passe ensuite à son usage généralisé en sciences physiques et en sciences sociales. Il termine par des remarques relatives à l'usage fait de cette notion.

Mots-clés : dimension, mathématiques, domaine sémantique, sciences physiques, sciences sociales

La noción de *dimensión*, propuesta como cuestión para el Seminario de Semiótica de Puebla en 2023, no se limita a los campos de la lingüística (Hjelmslev) y de la semiótica (Greimas y Courtés), citados en el texto de orientación. Esta noción es recurrente en numerosos discursos donde la *metáfora del espacio* se utiliza como herramienta descriptiva para dar cuenta de dominios que, como la economía o la psicología, no parecen prestarse a ello *a priori*. Y, sin embargo, funciona relativamente bien cuando evocamos estos *dominios semánticos* como si poseyeran las cualidades de un espacio. El matemático René Thom (1972) asumía este procedimiento al afirmar que la morfología del espacio continuo es fundamental y que permite pensar el mundo de una manera más adecuada que los modelos que ponen en juego magnitudes discretas.

Esta introducción prepara el terreno: el término *dimensión* pertenece a un metalenguaje descriptivo, cuyo objeto es un *microuniverso semántico* cualquiera, y que privilegia la metáfora espacial para describirlo. Considerando la diversidad de los usos del término *dimensión*, cabe preguntarnos si se trata de una o de varias metáforas espaciales puestas en práctica. Hasta el siglo XVIII, los círculos cultos sólo conocían una geometría para describir el espacio: la heredada de Euclides, redescubierta en el siglo XII a través de traducciones árabes antes de ser reestablecida en latín, en griego y luego en diversas lenguas europeas. A comienzos del siglo XVII, René Descartes introdujo el cálculo en la geometría, traduciendo en cifras los enunciados de Euclides, dotando al espacio de módulos de medida y adoptando convenciones de cálculo formal. Algunas décadas antes, los inicios de una geometría proyectiva habían germinado entre los ingenieros,[1] que levantaban fortificaciones; los cartógrafos, que buscaban la mejor manera de representar en un plano las formas de una tierra esférica,[2] y los dibujantes, que trazaban perspectivas y anamorfosis.[3] El conjunto de estos intentos tenía un carácter práctico que tendía a adoptar una forma teórica.

En otro ámbito matemático, se estaba gestando una revolución conceptual entre quienes practicaban el cálculo aritmético. Desde la antigüedad mesopotámica, se sabía que al multiplicar dos números se obtenía la medida de una superficie,[4] y al multiplicar tres números, la medida de un volumen. Y desde que los árabes habían adoptado de los indios la

[1] Como Francesco di Giorgio Martini (1439-1501).
[2] Como Pedro Nunes (1502-1578) y Gerardus Mercator (1512-1594).
[3] Como Girard Desargues (1591-1661) y Abraham Bosse (1602-1676).
[4] En su tratado sobre el álgebra, Al-Khawarizmi designa expresamente el producto de dos números con el término *superficie* (véase Rashed, 1997, p. 33). Un capítulo del Álgebra de Al-Khawarizmi está dedicado al cálculo de superficies para la agrimensura. Al-Samaw'al sigue a Al-Khawarizmi en dicho uso (véase Rashed, 2017, p. 447).

notación decimal de los números[5] y habían perfeccionado algoritmos gráficos para escribir el cálculo del producto de una multiplicación de dos números,[6] se podía continuar multiplicando aún más. Pero se planteó la cuestión de para qué podía servir la multiplicación de cuatro números: tal operación no tenía más *realidad* física que un volumen. Entonces, ¿era *correcto* multiplicar cuatro números? ¿O cinco números, o n números? Detrás de esta pregunta había un doble presupuesto: el mundo en que vivimos tiene *tres dimensiones*, y la multiplicación sirve para medir el mundo. La cuestión metafísica de las multiplicaciones sucesivas no se resolvió, pero se seguía multiplicando porque se disponía de una técnica para hacerlo. Predominaba una actitud pragmática.

Las tres dimensiones atribuidas al espacio por el sentido común suelen designarse como la longitud, la anchura y la altura. Ellas exteriorizan[7] y objetivan[8] el referente trirrectángulo del cuerpo humano[9] (dirección *prospectiva* delante-detrás, dirección *lateral* derecha-izquierda, dirección *vertical* arriba-abajo) (Hammad, 1985). Se adaptan bien a la descripción de los campos irrigables en la llanura, de las salas rectangulares y de las casas en forma de paralelepípedo. Pero presentan un problema cuando se trata de describir las formas orgánicas, la morfología de una cadena montañosa, la del globo terrestre o los arcos y las bóvedas de una catedral gótica, sin mencionar la longitud del litoral de un país como Francia o Inglaterra (Mandelbrot, 1975). Los técnicos siguieron midiendo de manera pragmática, con las aproximaciones necesarias. La cuestión de las dimensiones aritméticas se trasladó al álgebra, donde la *potencia*[10] de una variable en una ecuación se designaba con el término *dimensión* de la ecuación.

A principios del siglo XIX, algunos geómetras tuvieron la idea de cuestionar uno de los axiomas de Euclides, que establece que sólo se puede trazar una paralela a una recta desde un punto situado fuera de dicha recta. Riemann supuso que podían trazarse varias paralelas. Con tal axioma, construyó una geometría coherente, sin contradicciones internas. No servía para describir el mundo del sentido común, pero sí para describir una esfera en la que los

---

[5] Muhammad ibn Musa al-Khwarizmi (nacido hacia 780-muerto hacia 850): *Tratado sobre el sistema de numeración de los indios*; *Al-Jabr wa-l-Muqabalat* (*Compendio de cálculo por restauración y comparación*).

[6] En tanto los números se anotaban con las letras del alfabeto, a la manera de los arameos, griegos y latinos de la Antigüedad, el cálculo no podía formalizarse por escrito: se procedía mediante cálculo mental, utilizando guijarros (*calculi*) o ábacos (Leonardo Fibonacci, Liber abaci, 1202) como soporte mnemotécnico, y luego se anotaba el resultado.

[7] Por una operación de *desembrague*, véase Greimas y Courtés, 1979, *Dictionnaire*… [*Sémiotique. Dictionnaire raisonné de la théorie du langage*. En español: Greimas, A. J. y Courtés, J. (1982). *Semiótica. Diccionario razonado de la teoría del lenguaje*. Madrid: Gredos].

[8] Por borramiento del sujeto enunciador.

[9] Matemáticos de finales del siglo XIX y comienzos del XX, como Riemann, Borel y Poincaré, desarrollaron una definición más abstracta y rigurosa de las tres dimensiones del espacio físico. Pero no se había esperado este trabajo de refundación axiomática para formular la idea de las tres dimensiones del espacio cotidiano.

[10] Número de veces que multiplica la variable por sí misma: al cuadrado, al cubo…

grandes círculos meridianos corresponden a las rectas paralelas del plano. Lobachevski supuso que no podía trazarse paralela alguna a esta recta y construyó otra geometría coherente, que no correspondía a ninguna realidad conocida en esa época. Una ebullición intelectual agitó la comunidad de los matemáticos: ya no había sólo una geometría, sino varias; estas geometrías no tenían por qué describir el mundo “real” del sentido común, bastaba con su coherencia interna. A mediados de siglo, la abundancia de geometrías se asemejaba a un bello desorden.

En 1871, para su lección inaugural en la cátedra de matemáticas de la Universidad de Erlangen, Félix Klein pronunció un discurso memorable, conocido desde entonces como el Programa de Erlangen: hacía comparables las geometrías y ponía orden en su profusión. Para ello, las clasificaba por nivel de abstracción,[11] en función de los axiomas que admitían en su construcción. En el nivel más abstracto situaba la *topología*, que no reconoce en el espacio más que vecindades, continuidades, contigüidades y cortes. Si se introduce en ella la noción de línea recta, con alineaciones de puntos y haces de rectas, se construyen geometrías *proyectivas*. Si se introduce la noción de medida de distancia y de ángulo, se construyen geometrías *métricas*, de las que la de Euclides es una variante. La organización de conjunto de F. Klein (1871) no ha sido cuestionada desde su introducción. Medio siglo más tarde, Jean Piaget adoptó este orden lógico de las geometrías, lo proyectó sobre el eje temporal y demostró que correspondía al desarrollo cognitivo del niño y de su percepción del espacio (Piaget e Inhelder, 1972).

Retomemos la cuestión de las dimensiones. En el marco de la geometría euclidiana, se pueden medir distancias según las tres dimensiones (longitud, anchura y altura) y calcular magnitudes como superficies y volúmenes. ¿Se pueden reconocer en la geometría topológica y proyectiva dimensiones no medibles? La respuesta exige separar las nociones de *distancia* y de *dimensión*. Contrariamente a lo que podría dar a entender la etimología latina, según la cual *dimensio* se construye sobre *metiri* = medir, los matemáticos admiten *dimensiones no métricas* en los niveles topológico (Poincaré, 1908, pp. 55 y ss.) y proyectivo del espacio. Una superficie posee dos dimensiones no porque disponga de una longitud y una anchura, sino porque puede ser cortada en dos mediante una línea unidimensional. El espacio llamado natural posee tres dimensiones porque puede ser cortado en dos mediante una superficie bidimensional. En otras palabras, la noción de *dimensión* se disocia del sistema trirrectángulo corporal ligado a un sujeto observador humano, para objetivarse y definirse en un nivel más abstracto.

Esto lleva a distinguir las nociones de *dimensión* y de *dirección*. La dimensión de un espacio es una propiedad topológica del espacio considerado, *intrínsecamente* ligada a ese objeto

[11] Nótese la lógica común (por niveles de abstracción) entre la clasificación de las geometrías de Erlangen y la organización de los niveles semánticos del recorrido generativo en A. J. Greimas.

particular. La dirección es una noción que *presupone un sujeto observador delegado* situado en dicho espacio, como presupone la noción de *recta* (que pasa por el sujeto observador). En términos semióticos, el sujeto observador presente en el espacio está desembragado por el sujeto analista y delegado para ser colocado en el espacio objeto. El sujeto cognitivo antropomorfo proyecta sobre los espacios que considera la noción de dirección, como la dirección *prospectiva* (que parte del sujeto hacia un "delante" cuya definición está ligada a la morfología del cuerpo humano), *retrospectiva*, *lateral* (en la cual se distingue *derecha* e *izquierda* mediante una designación arbitraria) y *vertical*. Esta última dirección está impuesta por la gravedad, es decir, por la interacción entre el sujeto observador y la tierra (u otro cuerpo astronómico), según las leyes de la gravedad. Es probable que una estrella de mar o un pulpo nadando en el océano tengan nociones direccionales diferentes, pero conserven la noción de dirección vertical impuesta por la gravedad (suponiendo que estos animales estén dotados de capacidades cognitivas) (Uexküll, 1965).

En 1820, el físico danés Ørsted observó un fenómeno electromagnético que lo sorprendió (Hammad, 1985). En aquella época, los dominios de la electricidad y el magnetismo eran poco conocidos, y los espíritus curiosos se entretenían con descargas electrostáticas. Ørsted había colocado la aguja de una brújula bajo un hilo de cobre conectado a los bornes de una pila de Volta. Cuando cerraba el circuito, la aguja de la brújula se desviaba. El fenómeno sorprendente era espacial: todo en el dispositivo era simétrico, pero el cierre del circuito creaba una disimetría con la desviación. Como la brújula es atraída por el norte, Ørsted intentó analizar el fenómeno remitiéndolo a la tierra, sin éxito. El inglés H. Davy tampoco tuvo éxito. Fue A. M. Ampère quien encontró la manera de *predecir* el sentido de la desviación, delegando un observador *antropomorfo*[12] en miniatura al nivel del hilo de cobre. Este observador distinguía sus pies de su cabeza, su derecha de su izquierda y dirigía su mirada. Dicho de otro modo, Ampère (analista enunciador) había enviado al espacio de la experiencia un sujeto delegado (desembragado en el enunciado), dotado de un *referente tridimensional orientado* homólogo al del sujeto analista. Inauguraba así un procedimiento que sería retomado por Faraday y por Einstein: el del observador delegado en el espacio físico estudiado. Lo que se analizaba era el espacio de la experiencia,[13] considerado un microuniverso semántico.

El ámbito de la Física conoce otro uso del término *dimensión*, que implica un grado superior de abstracción. Robert Boyle, contemporáneo de Descartes, a través de sus experimentos de laboratorio, estableció la ley de los gases perfectos, que expresa mediante una ecuación matemática la relación estable entre el volumen de un gas y su presión:[14] P1.V1 = P2.V2. En otras palabras, cuando se comprime un gas, su volumen disminuye proporcionalmente, y

[12] Conocido desde entonces con el nombre de "muñeco de Ampère" en todos los libros de física.
[13] Para un análisis completo del descubrimiento, véase Hammad, 1985.
[14] En Francia, el abad Edme Mariotte demostraba el mismo fenómeno en la misma época.

viceversa. Esta ley será generalizada para tener en cuenta las variaciones de temperatura, ya que el gas se calienta cuando se comprime, es decir: P1.V1/T1 = P2.V2/T2.

Las tres magnitudes P, V, T (Presión, Volumen, Temperatura) son llamadas *dimensiones* de la ecuación. Dicho de otro modo, son las *dimensiones del espacio de descripción* del gas perfecto. Pero el gas no es más que un caso particular, y todas las cuestiones de la física pueden tratarse de la misma manera: sus variables principales se denominan *dimensiones*, y su combinación formal en una ley matemática da lo que se llama la *ecuación de las dimensiones*.

En este uso, es el *dominio de la materia* el que se considera un espacio, y sus dimensiones pertinentes no son la longitud, la anchura o la altura del espacio del sentido común, sino las magnitudes físicas pertinentes (*Presión*, *Volumen* y *Temperatura* para un gas), determinadas por los experimentos de laboratorio. Ya no es más cuestión de geometría, la noción de espacio se ha vuelto abstracta y puede tener como dimensiones factores físicos con diversas *cualidades descriptivas*. El espacio considerado es un *espacio de descripción*, un *microuniverso semántico*, específico de un dominio científico dado.

En el ámbito de las ciencias sociales, los problemas son a menudo complejos, y cuesta saber cuáles son las variables pertinentes (o determinantes). En tal caso, se puede, a título exploratorio, considerar un gran número de variables (el mayor número posible, en función de los medios disponibles) reunidas dentro de un *espacio de descripción provisional*, y luego intentar reducir el número de variables (número de *dimensiones* del problema), eliminando las *variables dependientes* y conservando las *variables independientes* (Benzécri *et al*., 1973). De este modo, el razonamiento ulterior resultaría pertinente en primer lugar, y cómodo en segundo lugar, ya que la reducción pone la cuestión al alcance de los medios disponibles.

Este método se ha utilizado ampliamente en el análisis numérico desde que existen las computadoras. Muchas técnicas matemáticas han sido desarrolladas con este fin. A modo de ejemplo, describiremos una de forma simple. El cálculo vectorial representa las entidades variables y sus descriptores como una nube de puntos en un *espacio de n dimensiones*. El número n puede ser relativamente grande, pero está limitado por las capacidades de cálculo disponibles. Las técnicas de cálculo matricial (multiplicación de una matriz por su transpuesta) permiten simplificar la descripción *eliminando los vectores dependientes* que se reducen a cero, lo que deja subsistir únicamente los *vectores principales, relativamente independientes* entre sí, llamados *vectores propios*. La importancia relativa de los vectores está indicada por los *valores propios* que les corresponden. Al conservar sólo un pequeño número de vectores propios, se reduce el número inicial de variables y se disminuye el *número de dimensiones del espacio* considerado, que pasa de n a 2 o 3, es decir, a situaciones simples donde se puede estudiar la variación de una magnitud en función de la variación de una o dos más. Queda por *interpretar semánticamente* los vectores propios, que en general no corresponden a las primeras variables que han sido consideradas, sino que se asemejan a compuestos formados por un conjunto de variables relacionadas. Esta fase de interpretación no proviene del ámbito matemático, sino que exige un conocimiento profundo del dominio semántico descrito.

En el uso matemático que acabamos de resumir, el término *dimensión* tiene dos sentidos:

- cuando se dice que el espacio de representación inicial tiene n dimensiones, se designa el número de variables descriptivas consideradas para la fase exploratoria;
- cuando se conserva un pequeño número de vectores propios, ese número corresponde a las dimensiones pertinentes del espacio de descripción.

Por medio del cálculo, se ha transformado el espacio semántico considerado para *reducir el número de dimensiones*. Estas *dimensiones construidas* finales son relativamente *independientes unas de otras*. Esto proporciona una clave para el uso científico del término *dimensión*: las *dimensiones pertinentes de un dominio* son *independientes* entre sí, lo que enuncia en términos algebraicos un hecho que corresponde a las rupturas reconocidas en términos topológicos en la definición de las dimensiones del espacio según Poincaré y el *Analysis Situs*.

Volvamos a las ciencias sociales. Las isotopías "funcionales" identificadas por Georges Dumézil (1958 y 1966) y Émile Benveniste (1969) para describir las sociedades antiguas (función *política*, *religiosa*, *militar*, *económica*) parecen relativamente independientes unas de otras. Por lo tanto, *pueden* calificarse como *dimensiones* descriptivas. Recordemos que no todas las isotopías identificables en un corpus semántico son independientes ni son elegibles para el título de dimensión. A modo de ejemplo, la isotopía *jurídica* no está situada en el mismo nivel que las isotopías *política*, *religiosa*, *militar* o *económica*. En la medida en que presupone los conflictos económicos, la isotopía jurídica aparece como una variable dependiente. Presupone la isotopía *militar* en la medida en que la aplicación de las decisiones judiciales sólo es válida si existe una fuerza que la ejecute. Presupondría la isotopía *religiosa* si la religión legitimara las leyes, lo que ocurre en muchas culturas.

En suma, la noción de *dimensión* procede de una interpretación espacial de las formas de pensar y hacer en matemáticas (geometría, aritmética) y en ciencias físicas. Ha sido generalizada a todo dominio considerado un microuniverso semántico. No es propia de la semiótica del espacio ni de la semiolingüística. Es aplicable a la sociedad considerada como espacio social, oponible al espacio físico y dotada de dimensiones semánticas independientes de las del espacio físico (Hammad, 2021). Es importante verificar si las dimensiones son pertinentes para el dominio considerado e independientes entre sí.

El reconocimiento de dimensiones en un espacio descriptivo es un procedimiento de *puesta en orden* del dominio, para distinguir en él los *descriptores principales* de los secundarios.

De ahí se pueden extraer categorías de clasificación taxonómica. Hasta el siglo XX sólo se utilizó un número entero de dimensiones en la descripción de los espacios. Sin embargo, la consideración de datos que manifiestan homotecias internas en diferentes escalas llevó a Benoît Mandelbrot (1975) a introducir las dimensiones fractales. Pero esa ya es otra historia.

Bibliografía

Benveniste, É. (1969). *Le vocabulaire des institutions indo-européennes*. Éditions de Minuit. [Versión en español: Benveniste, É. (1983). *Vocabulario de las instituciones indoeuropeas*. Taurus].

Benzécri, J. P. *et al*. (1973). *L'analyse des données* (2 vol.). Dunod.

Dumézil, G. (1958). *L'idéologie tripartite des Indo-Européens*. Latomus.

Dumézil, G. (1966). *La religion romaine archaïque*. Payot.

Greimas, A. J. y Courtés, J. (1979). *Sémiotique. Dictionnaire raisonné de la théorie du langage*. Hachette. [Versión en español: Greimas, A. J. y Courtés, J. (1982). *Semiótica. Diccionario razonado de la teoría del lenguaje*. Gredos].

Hammad, M. (1985). Le Bonhomme d'ampère. *Actes Sémiotiques VIII* (33).

Hammad, M. (2021). *Lire l'espace, étendre le domaine sémiotique*. Geuthner.

Klein, F. (1871). *Le programme d'Erlangen*. Gauthier-Villars. [Versión en español: Klein, F. (1995). Programa de Erlangen. Consideraciones comparativas sobre nuevas investigaciones geométricas. Traducción de C. Prieto de Castro. *Mathesis*, *11*, 331-370].

Mandelbrot, B. (1975). *Les objets fractals. Forme, hasard et dimension*. Flammarion. [Versión en español: Mandelbrot, B. (1997). *Los objetos fractales: forma, azar y dimensión*. Tusquets].

Piaget, J. e Inhelder, B. (1972). *La représentation de l'espace chez l'enfant*. PUF. [Versión en español: Piaget, J. e Inhelder, B. (1975). *La representación del espacio en el niño*. Morata.]

Poincaré, H. (1908). *La valeur de la science*. Flammarion. [Versión en español: Poincaré, H. (s. f.). *El valor de la ciencia*. ILCE (ed. digital)].

Rashed, R. y Morelon, R. (1997). *Histoire des sciences arabes*: *Mathématiques et physique* (vol. 2). Seuil.

Rashed, R. (ed.) (2017). *Lexique historique de la langue scientifique arabe*. Hildesheim, Olms Verlag.

Thom, R. (1972). *Stabilité structurelle et morphogénèse, Reading* (Mass.). W. A. Benjamin. [Versión en español: Thom, R. (2007). *Estabilidad estructural y morfogénesis*. Gedisa].

Uexküll, J. von (1965). *Mondes animaux et monde humain*. Denoël. [Versión en español: Uexküll, J. von (2016). *Andanzas por los mundos circundantes de los animales y los hombres*. Cactus.]

Acerca del autor

Manar Hammad nació en 1944 en Beirut. Tras realizar estudios de matemáticas, arquitectura y semiótica, se ha dedicado a la docencia y a la investigación en el campo de la semiótica del espacio y la arqueología. En sus artículos, una parte considerable se dedica a observaciones metodológicas y epistemológicas. Los espacios objeto de estudio se distribuyen entre el periodo neolítico, la Antigüedad, la Edad Media y la época contemporánea. En términos geográficos, los espacios van desde Japón hasta Francia, pasando por la cuenca mediterránea. Podemos destacar su última publicación del 2025: “Entre architecture, sémiotique et physique, y a-t-il place pour la force comme outil descriptif ?”, en *Actes Sémiotiques*, núm. 132 (https://doi.org/10.25965/as.8868).

Texto recibido: 20/07/2024; Revisado: 11/02/2025; Aceptado: 17/02/2025

Contenido publicado en acceso abierto bajo una licencia Creative Commons
Atribución-NoComercial-CompartirIgual 4.0 Internacional (CC BY-NC-SA 4.0)

Benemérita Universidad Autónoma de Puebla
Seminario de Estudios de la Significación
Casa de la Palma, 4 Sur 303, Primer Piso, Col. Centro, C.P. 72000, Puebla. Pue., México.
Tel. +52 222 2295502, semioticabuap@gmail.com

https://topicosdelseminario.buap.mx/index.php/topsem