

Sobre un par de lógicas no clásicas

Rahiru Gama Sánchez

Filosofía

rahiru.gamasa@alumno.buap.mx

INTRODUCCIÓN

La lógica es una de las ramas fundamentales de la filosofía, una de sus tareas es la correcta estructuración de los argumentos filosóficos, pero no se agota en esta tarea o en sus aplicaciones filosóficas, sino que va más allá y tiene contacto directo con la matemática y la computación. A finales del siglo XIX y durante todo el siglo XX la lógica tuvo grandes desarrollos, uno de los cuales son las llamadas lógicas no clásicas. El siguiente ensayo tiene como finalidad presentar, de forma somera y entendible para aquellas personas que se interesen por la lógica y cuenten con conocimientos básicos de la misma, dos de las más reconocidas lógicas no clásicas: la lógica intuicionista y la lógica paraconsistente.

LOS TRES

PRINCIPIOS FUNDAMENTALES

Cuando se comienza en el estudio de la lógica formal una de las primeras cosas que se dan a conocer son los tres axiomas lógicos supremos o tres principios básicos del pensamiento. Estos son:

Principio de identidad: todo enunciado es idéntico a si mismo

Principio del tercero excluido: todo enunciado es verdadero o falso y no hay intermedios.

Principio de no contradicción: ningún enunciado es verdadero y falso a la vez.

Si los formalizamos quedan de la siguiente forma:

Principio de identidad: $P = P$

Principio del tercero excluido: $P \vee \neg P$

Principio de no contradicción: $\neg (P \wedge \neg P)$

Estos tres principios fueron considerados durante muchos siglos como suficientes para el correcto funcionamiento de la lógica, y fueron tomados como evidentes desde la época de Aristóteles. No es sino hasta el siglo XX que diversos lógicos, influenciados por el surgimiento de la geometría no euclidiana de Lobachevski, comenzaron a poner en duda alguno o algunos de estos principios supremos.

**LÓGICA
INTUICIONISTA**

El siglo XX representó una época de grandes cambios en las matemáticas y su concepción, filosófica y formalmente hablando uno de los temas de mayor interés fue el de la fundamentación de las matemáticas, del cual surgieron tres corrientes principales: 1- El logicismo de Gottlob Frege y Bertrand Russell; 2- El formalismo de David Hilbert y 3- el intuicionismo de Luitzen Egbertus Jan Brouwer, sobre el cual hablaremos a continuación.

El intuicionismo de Brouwer surgirá como una crítica a la lógica clásica y la forma en que se estaban desarrollando las matemáticas de su siglo. Particularmente, Brouwer no estaba de acuerdo con la concepción del infinito actual de la teoría de conjuntos de Cantor (Palau, 2002, p. 80). El intuicionismo tendrá un gran interés por el razonamiento matemático, el cómo deben desarrollarse los problemas matemáticos y las reglas que componen a las inferencias lógicas.

Para el intuicionismo las entidades matemáticas no existen en sí mismas como separadas de un sujeto pensante, sino que son construcciones del pensamiento, las cuales se desarrollan por medio de la creatividad humana. Como se puede observar, la construcción de estas entidades es de suma importancia para el intuicionismo, por esta razón, para afirmar la existencia de un objeto matemático o poder definirlo se necesitará de una prueba constructiva, lo que implica el uso de pruebas directas y descarta como inválidas las pruebas indirectas como la reducción al absurdo.

Para probar que a un grupo de elementos le pertenece determinada propiedad tendríamos que probar que le pertenece a cada uno de ellos, esto es posible cuando hablamos de conjuntos finitos, pero nos pone en aprietos si el conjunto sobre el cual queremos probar determinada propiedad es un conjunto con elementos infinitos, como lo es el de los números reales.

De aquí parte la crítica de Brouwer al uso del infinito actual (entendido como una totalidad finalizada, un ejemplo de infinito actual es el de los números naturales, sabemos que es infinito, pero en su uso matemático se emplea como una entidad finalizada) como objeto matemático, práctica que se ha extendido hasta nuestros días. Para Brouwer el infinito no debe ser entendido y usado sino como un infinito potencial, es decir, un infinito

sobre el que teniendo n elementos, siempre podemos obtener un elemento n+1, lo que conlleva que jamás llegue a ser una totalidad terminada.

Esta exigencia de pruebas constructivas de los postulados matemáticos conlleva el rechazo del ya mencionado principio del tercero excluido. Para los intuicionistas del hecho de que una proposición no sea falsa, no se seguirá sin más que sea verdadera. No se rechaza directamente la bivalencia lógica, si una proposición tiene valor de verdad, este no será más que verdadero o falso a través de su construcción, pero, mientras no haya una prueba constructiva no se puede afirmar de una proposición si es verdadera o falsa (Díez, 2013, p. 137).

El intuicionismo no se basará en condiciones de verdad, sino en condiciones de prueba, cosa que podría suponer un problema a la forma en que se trabaja matemática y lógicamente. Sostener la validez del tercero excluido para las proposiciones matemáticas y lógicas conllevaría el sostener que en matemáticas no hay o no puede haber problemas irresolubles, posición que carece de prueba para Brouwer (Brouwer, 1975, p. 109).

Brouwer desarrolló el intuicionismo como posición filosófica, pero fue su discípulo Arend Heyting quien realizó la formalización completa de la lógica intuicionista. Conocida como la semántica de Brouwer- Heyting-Kolmogórov en la cual no hay condiciones de verdad, sino condiciones de prueba. La definición de sus conectivas la presento a continuación (Díez, 2013, pp. 135-136):

1- Una prueba para una implicación $p \rightarrow q$ debe ser una prueba para p y una prueba para q.

2- Una prueba para la disyunción $p \vee q$ será una prueba para p o una prueba para q.

3- Una prueba para $p \rightarrow q$ es aquella en la que una prueba de p puede ser transformada en una prueba de q.

4- La prueba de $\neg p$ se da al querer dar una prueba de p y llegar a un absurdo (regla de la introducción de la negación) $p \rightarrow \perp \vdash \neg p$.

5- Una prueba de $\exists x Fx$ se da al construir un objeto p y la prueba correspondiente de Fp.

6- Una prueba de $\forall x Fx$ se obtiene cuando podemos probar que para todo p se da el caso que Fp.

Finalmente, la axiomatización intuicionista de Heyting comparte sintaxis con el cálculo clásico en el cálculo de prueba de Hilbert. Sus axiomas son los siguientes (Heyting, 1956, p. 101):

- A1. $A \rightarrow (A \wedge A)$.
- A2. $(A \wedge B) \rightarrow (B \wedge A)$.
- A3. $(A \rightarrow B) \rightarrow ((A \wedge C) \rightarrow (B \wedge C))$.
- A4. $((A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow C)) \rightarrow (A \rightarrow C)$.
- A5. $B \rightarrow (A \rightarrow B)$.
- A6. $(A \wedge (A \rightarrow B)) \rightarrow B$.
- A7. $A \rightarrow (A \vee B)$.
- A8. $(A \vee B) \rightarrow (B \vee A)$.
- A9. $((A \rightarrow C) \wedge (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \vee B) \rightarrow C)$.
- A10. $\neg A \rightarrow (A \rightarrow B)$.
- A11. $((A \rightarrow B) \wedge (A \rightarrow \neg B)) \rightarrow \neg A$.

Si quisiésemos extender nuestro cálculo a una lógica de primer orden con identidad, se añadirán los siguientes axiomas:

- A12. $\forall x Fx \rightarrow Fy$.
- A13. $Fy \rightarrow \exists x Fx$.
- A14. $x=x$
- A15. $x=y \rightarrow (\varphi(x) \rightarrow \varphi(y))$

**LÓGICA
PARACONSISTENTE**

La lógica paraconsistente es una lógica que no rechaza las contradicciones y la inconsistencia, sino que busca operar con ellas sin derivar en una trivialización. La relación de consecuencia lógica clásica es explosiva, lo que significa que para todo A y B, si en nuestro sistema podemos derivar A y $\neg A$, entonces podemos derivar B, esto es, de proposiciones contradictorias podemos derivar cualquier otra proposición.

La lógica paraconsistente rechaza el principio de no contradicción $\neg (A \wedge \neg A)$, trabaja con sistemas lógicos en los cuales se puedan modelar proposiciones contradictorias como A, $\neg A$, pero que de ellas no se deduzca cualquier cosa, esto es, sistemas lógicos inconsistentes, más no- triviales.

La lógica paraconsistente estudia las contradicciones desde un punto de vista formal, pero filosóficamente hablando el estudio de las contradicciones es trabajo del dialeatismo, posición según la cual existen contradicciones verdaderas. Si bien, el dialeatismo implica paraconsistencia, la paraconsistencia no implica forzosamente al dialeatismo, esto es debido a que la paraconsistencia estudia sistemas formales y su funcionamiento cuando albergan una contradicción, mientras que el dialeatismo estudia las consecuencias filosóficas de la existencia de contradicciones en más ámbitos que los puramente lógicos.

Existen tres figuras cuyos trabajos pueden ser considerados como un antecedente de la paraconsistencia, estos son los lógicos Łukasiewicz, Vasiliev y Jaśkowski.

Łukasiewicz fue un lógico polaco al que se le puede considerar como precursor de las lógicas no clásicas en general gracias a su trabajo en lógicas multivaluadas. Para Łukasiewicz el principio de no contradicción aristotélico para la lógica clásica tiene un papel similar al que tiene el V postulado de las paralelas de Euclides para la geometría, y pensaba que la lógica podía ser estudiada sin este principio, así como las geometrías no euclidianas trabajan sin el V postulado. Łukasiewicz no desarrolló un sistema lógico paraconsistente, pero fue de gran influencia para su alumno Jaśkowski, quien desarrolló la lógica discursiva. (Favela, 1985, pág. 6).

Vasíliev trabajó en una lógica imaginaria, la cual no eliminaría la existencia de contradicciones verdaderas en un mundo imaginario. Las contradicciones sí existirían, pero sólo en un mundo posible creado por nuestra mente. Su nombre de lógica imaginaria es porque Vasíliev no creía en la existencia de contradicciones en el mundo real, sino sólo en determinados mundos que tienen la característica de ser producto de la imaginación de un sujeto pensante, y su sistema desafortunadamente no sería del todo paraconsistente (Arruda, 1989, págs. 102- 103).

Jaśkowski fue un lógico polaco, cuyo aporte a la paraconsistencia fue el primer cálculo proposicional propiamente paraconsistente al cual nombró como lógica discursiva o discursiva. A lo largo de una discusión se dan diversas afirmaciones respecto a temas variados, esto debido a que a los mismos términos podemos darles significados distintos en momentos temporales distintos, estos cambios en los sentidos de las palabras pueden desembocar en proposiciones contradictorias, de analizarlas con la lógica clásica se obtendría una trivialización del sistema, por lo que se necesita de la paraconsistencia para su estudio. (da Costa y Lewin, 2005, pág. 190). A pesar de esto, Jaśkowski no elaboró una axiomatización de su cálculo proposicional paraconsistente.

Para da Costa y Lewin (2005, pág. 190) es necesario el desarrollo de un cálculo de predicados de primer orden con identidad para contar con una lógica o sistema lógico. Basándonos en esta posición, el lógico y matemático brasileño Newton C. A. da Costa fue, propiamente, el creador de la lógica paraconsistente, pues la axiomatizó y extendió su sistema a un cálculo de predicados de primer orden y de orden superior. Da Costa construyó una jerarquía de cálculos proposicionales conocida como C_n , $1 \leq n$

$\leq \omega$; el primero de estos es el cálculo C_1 cuyos símbolos primitivos son $\neg, \vee, \wedge, \rightarrow$ y los paréntesis.

Sus axiomas y reglas son los siguientes:

$$A1: A \rightarrow (B \rightarrow A)$$

$$A2: (A \rightarrow B) \rightarrow ((A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow (A \rightarrow C))$$

$$A3: A \rightarrow (B \rightarrow A \wedge B)$$

$$A4: A \wedge B \rightarrow A$$

$$A5: A \wedge B \rightarrow B$$

$$A6: (A \rightarrow C) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow ((A \vee B) \rightarrow C))$$

$$A7: A \rightarrow A \vee B$$

$$A8: B \rightarrow A \vee B$$

$$A9: \neg \neg A \rightarrow A$$

$$A10: A \vee \neg A$$

$$A11: B^\circ \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow ((A \rightarrow \neg B) \rightarrow \neg A))$$

$$A12: A^\circ \wedge B^\circ \rightarrow (A \rightarrow B)^\circ \wedge (A \wedge B)^\circ \wedge (A \vee B)^\circ$$

$$MP: A, A \rightarrow B \vdash B$$

Es importante aclarar que $A^\circ = \neg(A \wedge \neg A)$, lo que significa que A° se comporta de forma consistente, no es una oración contradictoria. A partir de estos axiomas y sus relaciones podemos construir otros cálculos como el C_n y el C_ω , además de que se puede extender la jerarquía de estos cálculos a los cálculos de primer orden C^n y primer orden con identidad $C=n$.

CONCLUSIÓN

Este trabajo no busca más que ser un texto expositivo de estas lógicas, no ahonda ni filosófica ni formalmente en las mismas, sino sólo muestra algunas de sus principales ideas y bases lógicas. No obstante, puede ser de utilidad para aquellas personas interesadas en las lógicas no clásicas. En la actualidad, su estudio es muy extendido no sólo en ámbito filosófico, sino también en el matemático y el computacional. Las lógicas no clásicas han tenido grandes desarrollos, y su implementación en campos como la inteligencia artificial es prueba de lo fructíferas que son.

REFERENCIAS

- * Alchourrón, C. E., Méndez, J. M., Orayen R., (Editores). (2005). *Lógica*. Madrid: Editorial Trotta.
- * Arruda, A., Graham, P., Routley, R., Norman, J., (Eds.). (1989). *Paraconsistent logic: Essays on the Inconsistent*. München: Analytica.
- * Brouwer, L. E. J. (1975). *Collected works: 1 Philosophy and Foundations of Mathematics*. Editado por Arend Heyting. North-Holland publishing company.
- * Díez Martínez, A. (2013). *Introducción a la Filosofía de la Lógica*. Universidad

Nacional de Educación a Distancia.

- * Favela, S. (1985). *Lógica paraconsistente: una introducción*. México: Universidad Nacional Autónoma de México.
- * Heyting, A. (1956). *Intuitionism. An Introduction*. North- Holland publishing company.
- * Palau, G. (2002). *Introducción filosófica a las lógicas no clásicas*. España: Editorial Gedisa.

